07/04/20

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αν έχει βέλτιστη λύση τότε υπάρχει κάποια β.ε.λ που είναι βέλτιστη.

Αλγόριθμος Simplex: ψάχνει για τη βέλτιστη λύση μετατοπίζοντας από βασική εφικτή λύση σε βας. εφικτή λύση της περιοχής εφικτών λύσεων. Έτσι ώστε σε κάθε βήμα να βελτιώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Όταν καταλήξει σε κορυφή από την οποία δεν μπορεί να μεταβεί σε κάποια γειτονική με καλύτερη τιμή της αντικ. συνάρτησης τερματίζει, καθώς αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

Θεωρούμε ότι τα ΠΓΠ που μελετάμε βρίσκονται σε κανονική μορφή, δηλαδή:

$$Z = \max(\underline{c}\,\underline{x})$$
$$A\underline{x} = b$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

. με P συμβολίζουμε το σύνολο των εφικτών λύσεων, ο πίνακας A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και πλήρους βαθμίδας $r(A) = m$

Συνθήκες βελτιστότητας

Αν δεν υπάρχει γειτονικό σημείο που να βελτιώνει την αντικ. συνάρτηση είμαστε σε τοπικό βέλτιστο. Σε αυτό το μάθημα τα τοπικά βέλτιστα είναι και ολικά λόγω της κυρτότητας αντικ. συνάρτησης και του συνόλου εφ. λύσεων.

Υποθέτουμε ότι είμαστε αρχικά σ'ένα σημείο $\underline{x} \in P$ και σχεδιάζουμε να μετακινηθούμε μακριά από το $\underline{x}$ προς την κατεύθυνση ενός διανύσματος $\underline{d} \in R^n$

Ορισμός: Έστω ένα σημείο $\underline{x}$ του πολυέδρου P. Ένα διάνυσμα $\underline{d} \in R^n$ λέμε ότι ορίζει μια εφικτή κατεύθυνση στο $\underline{x}$, αν υπάρχει θετικός πραγματικός θ τέτοιος ώστε $\underline{x} + \theta\underline{d} \in P$

Έστω x μια β.ε.λ ενός ΠΓΠ σε κανονική μορφή. Αν $x_{B(1)},\dots,x_{B(m)}$ είναι βασικές μεταβλητές, ο πίνακας $B=[A_{B(1)},\dots,A_{B(m)}]$ είναι ο αντίστοιχος βασικός πίνακας.

Αν $x_i=0$ $\forall$ μη βασική μεταβλητή, το διάνυσμα τιμών β. μεταβλ. δίνεται από $x_B=B^{-1}b$

Μελετάμε τη δυνατότητα μετακίνησης από το σημείο x σε ένα διάνυσμα $x+\theta d$ επιλέγοντας μια μη βασική μεταβλητή x_j και μεταβάλλοντας την τιμή της από μηδέν σε μια θετική τιμή θ. Οι υπόλοιπες μη βασικές μεταβλ. παραμένουν ίσες με 0. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές του d παίρνουν τιμές $d_j=1$ και $d_i=0$ για όλες τις μη βασικές μεταβλ. εκτός της x_j.

Το διάνυσμα $x_B+\theta d_B$, $d_B^T=[d_{B(1)},\dots,d_{B(m)}]$ είναι το διαν. μεταβλ. d που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές.

Αφού μας ενδιαφέρουν μόνο οι εφικτές λύσεις απαιτούμε $A(x+\theta d)=b$ και αφού x εφικτή λύση έχουμε ότι $Ax=b$.

Για να ικανοποιούνται οι περιορισμοί δεδομένου ότι $\theta>0$ θα πρέπει να ισχύει $Ad=0$. Αφού $d_j=1$ και $d_i=0$ για μη βασικές x_i έχουμε:

$0=Ad=\sum_{i=1}^{n}A_i d_i=\sum_{i=1}^{m}A_{B(i)}d_{B(i)}+A_j=Bd_B+A_j$, όπου B αποτελείται από m γρ. ανεξάρτητες στήλες άρα αντιστρέψιμος και παίρνουμε:

$d_B=-B^{-1}A_j$, η νέα λύση ικανοποιεί τους περιορισμούς.

Στη νέα λύση οι μη βασικές μεταβλητές x_i εκτός της x_j είναι 0 ενώ x_j θετική.

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές των βασικών μεταβλητών.

α) x μια μη εκφυλισμένη β.ε.λ. Τότε $x_B>0$ και τελικά $x_B+\theta d_B\geq 0$ για αρκετά μικρές τιμές του θ, δηλ. d ορίζει μια εφικτή κατεύθυνση.

β) Αν η β.ε.λ από την οποία ξεκινάμε είναι εκφυλισμένη τότε d δεν ορίζει πάντα μια εφικτή κατεύθυνση. Είναι δυνατόν μια βασική μεταβλητή $x_{B(i)}$ να είναι μηδέν ενώ η αντίστοιχη μεταβλ. $d_{B(i)}$ του $d_B=-B^{-1}A_j$ αρνητική.

Σε αυτή τη περίπτωση ο περιορισμός μη αρνητικότητας παραβιάζεται για $\theta>0$

Ρυθμός μεταβολής αντικ. συνάρτησης: $\underline{c}^T \underline{d} = \underline{c}_B^T \underline{d}_B + c_j$, $\underline{c}_B^T = [c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)}]$ το διαν. συντελεστών της αντικ. συνάρτησης.

Από $\underline{d}_B = -B^{-1} A_j \Rightarrow \underline{c}^T \underline{d} = c_j - \underline{c}_B^T B^{-1} A_j$

Ορισμός Αν x μια βασική εφικτή λύση του πολυέδρου P, B ο αντίστοιχος βασικός πίνακας και $\underline{c}_B$ το διάνυσμα των συντελεστών αντ. συνάρτησης των βασ. μεταβλητών. Τότε για x_j ορίζουμε ως μοναδιαία αύξηση του κέρδους $\bar{c}_j$ της x_j την ποσότητα $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{A}_j$

Παράδειγμα 3.1

Έστω το ΠΓΠ $z = \max(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

α) Να βρείτε μια β.ε.λ

β) Υπολογίστε το διαν. βασικής κατεύθυνσης κατά τη διεύθυνση μιας από τις μη βασικές μεταβλητές και την αντίστοιχη μον. αύξηση κέρδους

Λύση:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $A_1^T = [1, 2]$ και $A_2^T = [1, 0]$ είναι γρ. ανεξάρτητες οπότε μπορούμε να επιλέξουμε τις x_1, x_2 ως βασικές μεταβλητές.

ο αντίστοιχος πίνακας $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Θέτουμε $x_3 = x_4 = 0$ και επιλύοντας ως προς x_1, x_2 προκύπτει $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Το διάνυσμα βασικής κατεύθυνσης που αντιστοιχεί στη μεταβλητή της μη βασικής μεταβ. x_3 θα είναι:

θα πρέπει $d_3 = 1$ και $d_4 = 0$ $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_B = -B^{-1} A_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Η μονάδα αύξησης κέρδους που προκύπτει αν μετακινηθούμε σε αυτή είναι
$\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = 2,5$

Παρατήρηση: Για κάθε βασική μεταβλητή $x_{B(i)}$ έχουμε:
$$\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - c_B^T B^{-1} A_{B(i)} = c_{B(i)} - c_B^T e_i = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0$$
δηλ. η μονάδα αύξηση κέρδους για τις βασ. μεταβλητές είναι 0

Θεώρημα: Έστω μια β.ε.λ x που αντιστοιχεί σ' ένα βασικό πίνακα B και έστω $\bar{c}$ το αντίστοιχο διάνυσμα μοναδιαίων αυξήσεων κέρδους.
α) Αν $\bar{c} \leq 0$ τότε το x είναι βέλτιστη λύση
β) Αν το x είναι βέλτιστη και μη εκφυλισμένη εφικτή λύση τότε $\bar{c} \leq 0$

Σημείωση: Το θεώρημα επιτρέπει τη δυνατότητα $\bar{c}_j > 0$ για κάποια μη βασική μεταβλητή x_j, αν x μια εκφυλισμένη βέλτιστη β.ε.λ

Δηλαδή ένα κριτήριο απόφασης της βελτιστότητας είναι ο έλεγχος μη θετικότητας όλων των μοναδιαίων αυξήσεων κέρδους των $n-m$ μη βασικών μεταβλητών
Εναλλακτικός τρόπος:

Ορισμός: Ένας βασικός πίνακας B καλείται βέλτιστος αν ισχύουν:
α) $B^{-1} b \geq 0$ και
β) $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \leq 0^T$

Αλγόριθμος Simplex (Αναπτυγμένη)

Υποθέτουμε ότι:
1) Κάθε β.ε.λ είναι μη εκφυλισμένη
2) Στην αρχή βρισκόμαστε σε μια β.ε.λ x και έχουμε εκτιμήσει τις μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους $\bar{c}_j$ των μη βασ. μεταβλητών.
Αν όλες είναι ≤ 0 η x βέλτιστη λύση και τερματίζουμε

Αν όμως υπάρχει κάποιο $\bar{c}_j > 0$ η j-οστή κατεύθυνση $\underline{d}$ είναι εφικτή κατεύθ. και μας οδηγεί σε εφικτές λύσεις με βελτιωμένο κέρδος.

Η κατεύθυνση $\underline{d}$ προκύπτει αν θέσουμε $d_j = 1$ και $d_i = 0$ για x_i μη βασική μεταβλ.
Καθώς μετακινούμαστε κατά τη $\underline{d}$ η μη βασική x_j γίνεται θετική ενώ οι άλλες μη βασικές παραμένουν 0. Σε αυτή τη περίπτωση η x_j εισέρχεται στη βάση ή γίνεται βασική.
Οδηγούμαστε σε σημεία $\underline{x} + \theta \underline{d}$, $\theta \geq 0$ και μετακινούμαστε όσο το δυνατόν περισσότερο.
Έτσι οδηγούμαστε στο σημείο $\underline{x} + \theta' \underline{d}$, $\theta' = \max\{\theta > 0 \mid \underline{x} + \theta \underline{d} \in P\}$
Μεταβολή του κέρδους $\theta' \bar{c}\, \underline{d} = \theta' \bar{c}_j$

2 περιπτώσεις για θ'

α) Αν $\underline{d} \geq 0$ τότε $\underline{x} + \theta \underline{d} \geq 0$ $\forall \theta \geq 0$ και $x + \theta \underline{d}$ εφικτή λύση $\forall \theta$.
Τότε $\theta' = +\infty$ και το κέρδος απειρίζεται.

β) $d_i < 0$ για κάποιο i, $x_i + \theta d_i \geq 0$ γίνεται $\theta \leq -\frac{x_i}{d_i}$
Τότε $\theta' = \min_{\{i \mid d_i < 0\}} \left(-\frac{x_i}{d_i}\right)$

Σημείωση: Από υπόθεση όλες οι β.ε.λ. δεν είναι εκφυλισμένες άρα θα πρέπει $x_{B(i)} > 0$ για όλα τα i και συνεπώς $\theta' > 0$

Παράδειγμα 3.2

$z = \max(-2x_1)$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

$2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

α) Βρείτε μια εφικτή λύση

β) Υπολογίστε το διαν. βασικής κατεύθυνσης μιας από τις μη βασικές και την μεταβ. αυτήν κέρδους

γ) Βρείτε ένα νέο εφικτό σημείο που μεγιστοποιεί το κέρδος σε αυτή την κατευθ. μετακίνησης

Λύση

Είναι το ίδιο πρόβλημα με αυτό της 3.1 με μόνη διαφορά την αντικειμενική συνάρτηση που εδώ είναι $z = \max(-2x_1)$
Άρα ο χώρος των εφικτών λύσεων είναι ο ίδιος και βασική εφικτή λύση η οποία ήταν $\underline{x}^T = [1, 1, 0, 0]$ και είχαμε δει $d_B = -B^{-1}A_3 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Αν μετακινηθούμε στην $\bar{c}_3$, είναι ίση με $\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A_3$

Στην περίπτωση μας $c_3 = 0$, $c_B^T = [-2, 0]$

Άρα $\bar{c}_3 = 0 - \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+3/2\\-1/2\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\bar{c}_3 = 3}$ αφού $\bar{c}_3 > 0$ μπορούμε

μετακινούμενοι κατά την $\underline{d} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right]$ να βελτιώσουμε την τιμή της αντικ. συνάρτησης

Οι λύσεις που προκύπτουν είναι τα στοιχεία $\underline{x} + \theta \underline{d}$, $\theta \geq 0$

Η μεγ. στη τιμή του θ είναι $\theta' = -\left(\frac{x_1}{d_1}\right) = \frac{2}{3}$ και οδηγούμαστε στο

σημείο $\underline{w} = \underline{x} + \frac{2}{3}\underline{d} = \left[0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right]^T$ ← οι μη μηδενικές μεταβλητές είναι οι $\underline{A_2}$ και $\underline{A_3}$ οι οποίες

είναι γρ. ανεξάρτητες Άρα $\underline{w}$ β.ε.λ.

Δηλαδή η x_3 έγινε βασική και η x_1 μη βασική. (Μπήκε στη βάση η x_3 και βγήκε η x_1)

∇ Ο νέος βασικός πίνακας B' προκύπτει από τον αρχικό πίνακα B αφαιρώντας την στήλη $\underline{A}_{B(l)}$ και τοποθετώντας στην θέση της την νέα βασική στήλη $\underline{A_j}$

$B' = [A_{B(1)} \dots, A_{B(l-1)}, A_j, A_{B(l+1)} \dots, A_{B(m)}]$ ← ο B' θα πρέπει να είναι επίσης αντιστρέψιμος

Θεώρημα 3.2

α) Οι στήλες $A_{B(i)}$, $i \neq l$ και A_j είναι γρ. ανεξάρτητες και συνεπώς ο πίνακας B' είναι βασικός πίνακας

β) Το διάνυσμα $\underline{z} = \underline{x} + \theta' \underline{d}$ είναι βασική εφικτή λύση που αντιστοιχεί στον βασικό πίνακα B'

Αλγόριθμος Simplex

1) Ξεκινάμε από μια αρχική βασική λύση $\underline{x}$ και τον αντίστοιχο ~~πίνακα~~ βασικό πίνακα B που αποτελείται από τις στήλες $A_{B(i)}$, $i=m$ του πίνακα A, οι οποίες είναι γρ. ανεξάρτητες και συνεπώς ο πίνακας B' είναι βασικός πίνακας.
2) Υπολογίζουμε τη μοναδιαία αύξηση κέρδους $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$ για όλες τις μη βασικές μεταβλητές. Αν είναι όλες μη θετικές η υπάρχουσα β.ε.λ είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επιλέγουμε κάποια μεταβλητή x_j με $\bar{c}_j > 0$ για να ~~γίνει~~ γίνει βασική.
3) Υπολογίζουμε το διάνυσμα $u = -d_B = B^{-1} A_j$. Εάν καμία από τις μεταβλητές του u δεν είναι θετική έχουμε $\theta' = +\infty$ το βέλτιστο κέρδος είναι ∞ και ο αλγόριθμος τερματίζει
4) Αν υπάρχουν μεταβλητές του $\underline{u}$ που είναι θετικές τότε

$$\theta' = \min_{i=1,\dots,m,\ u_i>0} \left(\frac{x_{B(i)}}{u_i} \right)$$

5) Έστω ℓ τέτοιο ώστε $\theta' = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$. Ο νέος βασικός πίνακας B' προκύπτει από τον προηγούμενο αν αντικαταστήσουμε τη στήλη $A_{B(\ell)}$ με τη στήλη A_j.
Αν $\underline{z}$ είναι η νέα βελτιωμένη β.ε.λ οι τιμές των νέων βασικών μεταβλητών δίνονται από $z_j = \theta'$ και $z_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta' u_i$, $i \neq \ell$
6) Επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Θεώρημα 3.3:

Υποθέτουμε ότι το σύνολο εφικτών λύσεων δεν είναι κενό και ότι όλες οι β.ε.λ του είναι μη εκφυλισμένες. Τότε η μέθοδος Simplex τερματίζει μετά από πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων. Στο τερματισμό υπάρχουν 2 ενδεχόμενα:
α) Η μέθοδος Simplex καταλήγει σε μια βασική εφ. λύση που είναι βέλτιστη.
β) Καταλήγει σ'ένα διάνυσμα $\underline{d}$ που ικανοποιεί τις $A\underline{d} = 0$, $\underline{d} \geq 0$ και $\bar{c}^T \underline{d} > 0$ και το βέλτιστο κέρδος είναι $+\infty$

Περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων.

Αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο ενώ υπάρχουν εκφυλισμένες β.ε.λ στο πρόβλημα είναι δυνατόν να έρθουμε αντιμέτωποι με 2 ενδεχόμενα:

α) Αν η β.ε.λ $\underline{x}$ είναι εκφυλισμένη τότε το ϑ' μπορεί να είναι μηδέν, οπότε η νέα β.ε.λ $\underline{z}$ είναι η ίδια με τη $\underline{x}$

Αυτό συμβαίνει όταν κάποια βασ. μεταβλητή $x_{B(l)} = 0$ και $d_{B(l)} < 0$

Σε αυτή τη περίπτωση παίρνουμε τον νέο βασικό πίνακα αντικαθιστώντας τη στήλη $\underline{A}_{B(l)}$ με τη στήλη $\underline{A}_j$

β) Αν το ϑ' είναι θετικό μπορεί ~~να~~ περισσότερες από μία βασ. μεταβλητές να μηδενίζονται στη νέα βασική λύση $\underline{z}$. Άρα μόνο η μία βγαίνει από τη βάση η άλλη παραμένει βασική. Άρα η νέα λύση είναι εκφυλισμένη.

Επιλογή κανόνων οδήγησης

Κανόνες επιλογής μεταβλητών

α) Επιλέγουμε τη στήλη $\underline{A}_j$ με $\bar{c}_j > 0$, $\bar{c}_j = \max_i \{\bar{c}_i\}$

Με αυτό τον κανόνα επιλέγουμε την κατεύθυνση μετακίνησης με τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης κέρδους.

β) Επιλέγουμε τη στήλη $\bar{c}_j > 0$, για την οποία η $\vartheta' |\bar{c}_j|$ είναι η μέγιστη.

Αυτός μπορεί να επιταχύνει ταχύτερη σύγκλιση του αλγόριθμου.

Βασικό μειονέκτημα είναι ότι απαιτεί μεγαλύτερο πλήθος υπολογισμών, αφού πρέπει να υπολογίσουμε το ϑ' για κάθε στήλη $\bar{c}_j > 0$

Αλγόριθμος Simplex με πλήρες tableau

Ορισμός Αν έχουμε έναν πίνακα, όχι κατά ανάγκη τετραγωνικό, καλούμε στοιχειώδη γραμμοπράξη την διαδικασία πρόσθεσης του γινομένου μιας γραμμής του σε μία άλλη ή την ίδια γραμμή του πίνακα.

Αφού $B^{-1}B = I$ θα πρέπει η στήλη $B^{-1}A_{B(l)}$ να είναι ίση με τον l-οστό μοναδιαίο διάνυσμα e_l. Γνωρίζουμε ότι ο B' διαφέρει από τον B μόνο ως προς την l-οστή στήλη άρα ισχύει ότι:

$$B^{-1}B' = [e_1, \ldots, e_{l-1}, u, e_{l+1}, \ldots, e_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & u_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & u_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & u_l & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & u_m & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $u = B^{-1}A_j$

Θέλουμε με γραμμοπράξεις να μετατρέψουμε τον πίνακα $B^{-1}B'$ σε μοναδιαίο. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

α) Για $i \neq l$, προσθέτουμε την l-οστή γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον συντελεστή $-\frac{u_i}{u_l}$ στην i-οστή γραμμή. Έτσι μηδενίζουμε τα u_i.

β) Διαιρούμε την l-οστή γραμμή με το u_l. Έτσι αντικαθίσταται το u_l με τη μονάδα.

Παράδειγμα

Έστω ότι $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $l=3$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον B'^{-1}

Λύση για να επιτευχθεί αυτό πρέπει:
να πολλαπλασιάσουμε την τρίτη γραμμή επί 2 (αφού $-\frac{u_1}{u_3} = 2$) και να την προσθέσουμε στην πρώτη γραμμή
Αφαιρούμε την τρίτη γραμμή από τη δεύτερη (αφού $-\frac{u_2}{u_3} = -1$)
Έτσι μηδενίζουμε τα u_i
Και διαιρούμε τη τρίτη γραμμή με το 2 (ώστε $u_3 = 1$)

Ο B'^{-1} είναι ο $B'^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -1 \\ -6 & 6 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας $B^{-1}[b|A]$ που περιέχει ως στήλες τα διανύσματα $B^{-1}b, B^{-1}A_1, \ldots, B^{-1}A_n$ καλείται tableau της Simplex. Ενώ η στήλη $B^{-1}\underline{b}$ μηδενική στήλη του tableau και είναι το διάνυσμα των τιμών των βασικών μεταβλητών.

Οι γραμμές του tableau περιέχουν τους συντελεστές των ισοτικών περιορισμών $B^{-1}\underline{b} = B^{-1}Ax$

Για την επιλογή της εξερχόμενης από τη βάση $A_{B(l)}$ και του θ^* στα βήματα 4 και 5 του αλγορίθμου παρατηρούμε ότι:

Ο λόγος $\frac{x_{B(i)}}{u_i}$ είναι ο λόγος του i-οστού στοιχείου της μηδενικής στήλης προς το i-οστό στοιχείο. Υπολογίζουμε τους λόγους μόνο για τα u_i θετικά.

Ο μικρότερος λόγος είναι ίσος με το θ^* και καθορίζει τη μεταβλητή που θα φύγει από τη βάση.

Το tableau έχει τη μορφή

$x_{B(1)}$ ⋮ $x_{B(m)}$	$B^{-1}A_1, \ldots, B^{-1}A_n$
$-c_B^T x_B$	$\bar{c}_1 \ldots\ldots \bar{c}_n$

Αλγόριθμος Simplex πλήρους tableau

1) Ξεκινάμε από το tableau που αντιστοιχεί σε μια β.ε.λ $\underline{x}$ και τον αντίστοιχο βασικό πίνακα B.

2) Εξετάζουμε τις μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους στη μηδενική γραμμή του tableau. Αν όλες είναι μικρότερες του μηδενός η υπάρχουσα β.ε.λ είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επιλέγουμε τη μεταβλητή x_j με το μεγαλύτερο $\bar{c}_j > 0$ για να γίνει βασική.

3) Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\underline{u} = B^{-1}\underline{A}_j$ που είναι η j-οστή στήλη του tableau δηλαδή είναι η στήλη του πιλότου. Αν κανένα στοιχείο του u δεν είναι θετικό έχουμε ότι το βέλτιστο κέρδος είναι ∞ και ο αλγόριθμος τερματίζει.

4) Για κάθε i τέτοιο ώστε $u_i > 0$ υπολογίζουμε τον λόγο $x_{B(i)}/u_i$. Έστω l ο δείκτης της γραμμής που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο. Η στήλη $A_{B(l)}$ εξέρχεται από τη βάση και η στήλη $\underline{A}_j$ εισέρχεται στη βάση.

5) Προσθέτουμε τη γραμμή του πιλότου (l-γραμμή) πολλαπλασιασμένη σε ένα συντελεστή $-\frac{x_{B(l)}}{u_l}$ σε κάθε γραμμή $i \neq l$ του tableau ενώ την γραμμή του πιλότου

την διαιρούμε με το στοιχείο πιλότος έτσι ώστε το στοιχείο πιλότος να γίνει ίσο με τη μονάδα κι όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης να γίνουν 0.

β) Επιστρέφουμε στο βήμα 1

Παράδειγμα 3.4

$$Z = \max(14x_1 + 12x_2 + 10x_3)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση με χρήση Simplex πλήρους tableau

Λύση: Μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή εισάγοντας περιθώριες μεταβλητές.

$$Z = \max(14x_1 + 12x_2 + 10x_3)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 20$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20$$

$$x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\underline{x}^T = [0, 0, 0, 20, 20, 20]$ είναι μια β.ε.λ άρα τη χρησιμοποιούμε για το ξεκίνημα του αλγορίθμου.

Η λύση αυτή προέκυψε από τη παρατήρηση ότι οι 3 τελευταίες στήλες του A αποτελούν τον μοναδιαίο 3x3 και άρα γρ. ανεξάρτητες, οπότε αποτελούν βασικό πίνακα.

Τότε $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = I\underline{b} = \underline{b}$ και για τον υπολογισμό της μηδενικής γραμμής $c_B = 0 \Rightarrow \underline{c}_B^T \underline{c}_B = 0$ και $\underline{z} = \underline{c}$

Άρα το αρχικό tableau είναι:

Τιμές των συντελεστών της αντ. συνάρ. των βασ. μεταβλ.

Τιμές συντελ. αντικ. συνάρτησης

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ
			14	12	10	0	0	0	
A_4	0	20	1	2	2	1	0	0	20
A_5	0	20	$\boxed{2}$	1	2	0	1	0	10
A_6	0	20	2	2	1	0	0	1	10
		0	14	12	10	0	0	0	

$B = [A_4, A_5, A_6]$

αναφέρει ποιες και σε ποια σειρά είναι οι βασ. μεταβλητές

$\theta = \frac{x_{B(i)}}{u_i}$

Το μέγιστο $\bar{c}_i = 14$, $i=1$

Έτσι η στήλη πιλότου είναι η $u = A_1 = [1, 2, 2]$

Υπολογίζουμε τα $\frac{x_{B(i)}}{u_i}$, οι μικρότεροι λόγοι για $i=2$ και $i=3$

Με χρήση του μικρότερου δείκτη επιλέγουμε για έξοδο από τη βάση τη μεταβλητή $x_{B(2)} = x_5$

Ο νέος βασ. πίνακας $B' = [A_4, A_1, A_6]$

Για να μεταβούμε στο νέο tableau διαιρούμε τη γραμμή του πιλότου με το στοιχείο πιλότος (στο παράδειγμα με το 2) και ακολουθούμε τις παρακάτω γραμμοπράξεις.

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ	
A_4	0	10	0	1.5	1	1	-0.5	0	$\frac{20}{3}$	$\Gamma_1 \sim \Gamma_1 - \Gamma_2'$
A_1	14	10	1	0.5	1	0	0.5	0	20	Γ_2'
A_6	0	0	0	$\boxed{1}$	-1	0	-1	1	0	$\Gamma_3 \sim \Gamma_3 - 2\Gamma_2'$
		-140	0	5	-4	0	-7	0		$\Gamma_4 \sim \Gamma_4 - 14\Gamma_2'$

Η νέα εφικτή λύση είναι $x^T = [10, 0, 0, 10, 0, 0]$ που είναι εκφυλισμένη επειδή η $x_6 = 0$. Η μοναδική μεταβλητή θετική είναι η x_2 άρα γίνεται αυτή βασ. μεταβλητή.

Η στήλη του πιλότου τώρα είναι $u = [1.5, 0.5, 1]$

Ο μικρότερος λόγος θ είναι για $i=3$

Άρα η τρίτη γραμμή που αντιστοιχεί στη x_6 είναι η γραμμή πιλότου

Ο νέος βασικός πίνακας γίνεται:

	c_B	x_B	A_1 (14)	A_2 (12)	A_3 (10)	A_4 (0)	A_5 (0)	A_6 (0)	θ	
A_4	0	10	0	0	$\boxed{2.5}$	1	1	-1.5	0	$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 1,5\Gamma_3$
A_1	14	10	1	0	1.5	0	1	-0.5	4,33	$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 0,5\Gamma_3'$
A_6	12	0	0	1	-1	0	-1	1	-	Γ_3'
		-140	0	0	1	0	-2	-5		$\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 5\Gamma_3'$

Η νέα εφ. λύση $X^T = [10, 0, 0, 10, 0, 0]$ επίσης εκφυλισμένη επειδή $x_2 = 0$. Το κέρδος παραμένει 140 δεν βελτιώθηκε.

Η x_3 μοναδική θετική.

Η νέα στήλη πιλότου η $y = [2.5 \;\; 1.5 \;\; -1]$ και ο μικρότερος λόγος $\theta = 0$ $i = 1$ η γραμμή πιλότου η x_4

Ο νέος βασ. πίνακας

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ
A_3	10	4	0	0	1	0.4	0.4	-0.6	
A_1	14	4	1	0	0	-0.6	0.4	0.4	
A_2	12	4	0	1	0	0.4	-0.6	0.4	
		-144	0	0	0	-0.4	-2.4	-4.4	

Η νέα εφικτή λύση $X^T = [4, 4, 4, 0, 0, 0]$ βέλτιστη αφού όλα τα $\bar{c}_j \geq 0$ με αντικ. συνάρτηση $Z = 144$

Παράδειγμα 3.5

Να βρεθεί βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας Simplex πλήρους tableau

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
			0,75	-20	-2.5	-6	0	0	-3	
A_5	0	0	$\boxed{0.25}$	-8	-1	9	1	0	0	0
A_6	0	0	0.5	-12	-0.5	3	0	1	0	0
A_7	-3	1	0	0	1	0	0	0	1	-
		3	0.75	-20	0.5	-6	0	0	0	

← λόγω ισοπαλίας το μεγαλ. i

↑ μέγιστο c_i

	c_B	x_B	A_1	…					A_7	θ
A_1	0.75	0	1	-32	-4	36	4	0	0	—
A_6	0	0	0	$\boxed{4}$	1.5	-15	-2	1	0	0
A_7	-3	1	0	0	1	0	0	0	1	-
		3	0	4	3.5	-33	-3	0	0	

$\Gamma_1' = \frac{\Gamma_1}{0.25}$

$\Gamma_2 \sim \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1'$

$\Gamma_3 \sim \Gamma_3$

$\Gamma_4 \sim \Gamma_4 - 0{,}75\Gamma_1'$

	c_B	x_B	A_1	…						θ
A_1	0.75	0	1	0	$\boxed{8}$	-84	-12	8	0	0
A_2	-20	0	0	1	0,375	-3,75	-0.5	0.25	0	0
A_7	-3	1	0	0	1	0	0	0	1	1
		3	0	0	2	-18	-1	-1	0	

Κάνοντας άλλες 4 επαναλήψεις επιστρέφουμε πάλι στο αρχικό tableau δηλαδή στην ίδια βασική λύση

Σε κάθε αλλαγή βάσης είχαμε $\theta' = 0$ και την ίδια λύση $x^T = [0,0,0,0,0,1]$ και κέρδος $z = -3$

Η Simplex δεν θα τερματίσει ποτέ (αέναη επανάληψη)

Τεχνικές αντιμετώπισης της αέναης επανάληψης λόγω ύπαρξης εκφυλισμένων β.ε.λ

1) Ο λεξικογραφικός κανόνας οδήγησης

Εμποδίζει αποτελεσματικά την ατέρμονη επανάληψη της Simplex και της επιτρέπει να τερματίσει.

Ορισμός: Ένα διάνυσμα $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι είναι λεξικογραφικά μεγαλύτερο (ή μικρότερο) από ένα άλλο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ αν $u \neq v$ και το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο του διανύσματος $\underline{u} - \underline{v}$ είναι θετικό (ή αρνητικό αντίστοιχα).

Συμβολίζουμε την παραπάνω ιδιότητα: $\underline{u} \overset{L}{>} \underline{v}$ ή $\underline{u} \overset{L}{<} \underline{v}$

Για παράδειγμα: $[0, 2, 3, 0]^T \overset{L}{>} [0, 2, 1, 1]^T$ και $[0, 4, 5, 7]^T \overset{L}{<} [1, 2, 1, 4]^T$

Ακόμη όταν $\underline{u} \overset{L}{>} 0$ το $\underline{u}$ είναι λεξικογραφικά θετικό.

Λεξικογραφικός κανόνας οδήγησης

1) Διαλέγουμε οποιαδήποτε μη βασική στήλη A_j για να την εισάγουμε στη βάση αρκεί να ισχύει ότι $\bar{c}_j > 0$. Έστω $\underline{u} = B^{-1}\underline{A}_j$ η j-στη στήλη του tableau της Simplex.

2) Για κάθε i με $u_i > 0$ διαιρούμε την i-στη γραμμή του tableau (συμπεριλαμβανομένων των στοιχείων της μηδενικής στήλης) με το u_i και επιλέγουμε την λεξικογραφικά μικρότερη γραμμή. Αν η l-στη γραμμή είναι η λεξικογραφικά μικρότερη τότε η l-στη βασ. μεταβλητή $x_{B(l)}$ εξέρχεται από τη βάση.

Παράδειγμα

Έχουμε το ακόλουθο tableau σε απλοποιημένη μορφή, δηλ. παραλείπεται τόσο η μηδενική γραμμή όσο και η γραμμές και οι στήλες ετικέτες και έχουμε:

1	0	5	3	1	0
2	4	6	-1	0	0
3	0	7	9	0	2

Έστω η στήλη του πιλότου είναι η 3η. Εφαρμόστε το δεύτερο βήμα του κανόνα για να βρείτε την γραμμή που αντιστοιχεί στη βασ. μεταβλητή που θα βγει από τη βάση.

Λύση Διαιρούμε τα στοιχεία κάθε γραμμής i με το u_i αν αυτό είναι θετικό. Εδώ έχουμε $u_1=3$, $u_2=-1$, $u_3=9$.
Άρα διαιρούμε τη πρώτη με $u_1=3$ και τη τρίτη με $u_3=9$ και έχουμε:

1/3	0	5/3	1	1/3	0
–	–	–	–	–	–
1/3	0	7/9	1	0	2/9

Βλέπουμε ότι η 3η γραμμή είναι λεξικογραφικά μικρότερη αφού $\frac{7}{9} < \frac{5}{3}$ και συνεπώς επιλέγεται η μεταβλητή $x_{B(3)}$ για να εξέλθει από τη βάση.

Παρατήρηση Ο λεξικογραφικός κανόνας οδηγεί πάντα σε μια μοναδική επιλογή εξερχόμενης ~~βασ~~ μεταβλητής.
Αν εμφανιζόταν ισοπαλία σε αυτό το κριτήριο θα σήμαινε ότι οι δύο γραμμές είναι ανάλογες. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας $B^{-1}A$ έχει βαθμό μικρότερο από m άρα κι ο πίνακας A έχει βαθμό μικρότερο από m, ενώ έχουμε υποθέσει ότι ο A έχει γραμμικά ανεξάρτ. γραμμές ~~μεταβλητές~~

Θεώρημα 3.4
Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος Simplex ξεκινάει με ένα tableau όπου οι γραμμές πλην της μηδενικής είναι λεξικογραφικά θετικές. Υποθέτουμε ότι ακολουθεί τον λεξικογραφικό κανόνα οδήγησης. Τότε:
α) Κάθε γραμμή του tableau Simplex με την εξαίρεση της μηδενικής παραμένει λεξικογραφικά θετική μέχρι το τερματισμό του αλγορίθμου.
β) Η μηδενική γραμμή μειώνεται αυστηρά λεξικογραφικά σε κάθε επανάληψη.
γ) Ο αλγόριθμος Simplex τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Παρατηρηση: Για να χρησιμοποιηθει ο λεξικογραφικος κανονας οδηγησης θα πρεπει ολες οι γραμμες του αρχικου tableau να ειναι λεξικογραφικα θετικες. Αν δεν ειναι ολες λεξ. θετικες μπορουμε να αλλαξουμε τη σειρα και την ονομασια των μεταβλητων ετσι ωστε οι πρωτες m μεταβλητες να ειναι οι βασ. μεταβλητες. Αυτο ειναι ισοδυναμο με την αναδιαταξη του tableau κατα τετοιο τροπο ωστε οι m πρωτες στηλες του $B^{-1}A$ να ειναι οι στηλες του μον. πινακα δηλ. τα m μοναδιαια διανυσματα.
Προφανως αυτο το tableau εχει λεξικ. θετικες γραμμες.

2) Κανονας του Bland

(Κανονας του μικροτερου δεικτη)

Κανονας οδηγησης του Bland

1) Διαλεγουμε το μικροτερο j για το οποιο ισχυει οτι $\bar{c}_j > 0$ και εισαγουμε τη στηλη A_j στη βαση.
2) Αν υπαρχει ισοβαθμια σε σχεση με το κριτηριο εξοδου απο τη βαση επιλεγουμε τη μεταβλητη x_i, με το μικροτερο δεικτη i.

Αυτος ο κανονας αντιμετωπιζει αποτελεσματικα το προβλημα των απειρων επαναληψεων και εγγυαται τον τερματισμο της Simplex σε πεπερασμενο αρ. επαναληψεων.

3) Η μεθοδος διαταραχης του Chanes

Δεν μεταβαλλουμε τον χρησιμοποιουμενο κανονα οδηγησης αλλα διαταρασουμε το προβλημα με τετοιο τροπο ωστε το διαταραγμενο προβλημα να εχει την ιδια βαση στην βελτιστη λυση με το αρχικο προβλημα.

Μέθοδος διαταραχής

1) Στο tableau από το οποίο θα προκύψει εκφυλισμένη λύση διαταράσουμε το διάνυσμα $\underline{b}$ θέτοντας στη θέση του το διάνυσμα

$$\underline{b}(\varepsilon) = \underline{b} + \varepsilon \underline{A}_1 + \varepsilon^2 \underline{A} + \dots + \varepsilon^n \underline{A}_n = \underline{b} + A\underline{w}(\varepsilon), \quad \underline{w}^T(\varepsilon) = [\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n]$$

όπου ε είναι ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός

Στο διαταραγμένο πρόβλημα προφανώς θα έχουμε $\underline{b}(\varepsilon) > \underline{0}$

2) Συνεχίζουμε κανονικά με τη μέθοδο Simplex μέχρι να βρούμε τη βέλτιστη λύση $\underline{x}_0$ του διαταραγμένου προβλήματος. Έστω x_{0B} το διάν. τιμών των m βασικών μεταβλητών της $\underline{x}_0$

3) Θέτουμε $x_B = \underline{x}_{0B} - \varepsilon B^{-1}\underline{A}_1 - \varepsilon^2 B^{-1}\underline{A}_2 - \dots - \varepsilon^n B^{-1}\underline{A}_n = \underline{x}_{0B} - B^{-1}A\underline{w}(\varepsilon)$

Το διάνυσμα x_B είναι το διάνυσμα τιμών των βασικών μεταβλητών της βέλτιστης λύσης x' του αρ. προβλήματος.

Αν θεωρήσουμε τα δύο ΠΓΠ το αρχικό και το διαταραγμένο

$\max(\underline{c}^T\underline{x})$	$\max(\underline{c}^T\underline{x})$
$A\underline{x} = \underline{b}$	$A\underline{x} = \underline{b} + A\underline{w}(\varepsilon)$
$\underline{x} \geq \underline{0}$	$\underline{x} \geq \underline{0}$

Είναι προφανές ότι αφού ε είναι αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός, οι βέλτιστες λύσεις $\underline{x}_0$ και x' των δύο προβλημάτων αντιστοιχούν στον ίδιο βασικό πίνακα B. Σε αυτή τη περίπτωση από τους περιορισμούς του διαταραγμένου προβλήματος έχουμε ότι:

$$B^{-1}A\underline{x}_0 = B^{-1}[\underline{b} + A\underline{w}(\varepsilon)] = x_{0B}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\underline{x}_{0B} = \underline{x}_B + B^{-1}A\underline{w}(\varepsilon)$

ή ισοδύναμα $\underline{x}_B = \underline{x}_{0B} - B^{-1}A\underline{w}(\varepsilon)$

Πιο απλοποιημένη μορφή αυτής: Στο tableau που εμφανίζεται η εκφυλισμένη λύση αντικαθιστούμε το 0 της βασ. μεταβλητής με ένα $\varepsilon > 0$ και συνεχίζουμε κανονικά με το τελικό tableau. Θέτοντας $\varepsilon = 0$ παίρνουμε τη βελ. λύση του αρχικού προβλήματος

Παράδειγμα 3.7

$$z = \max(4x_1 + 3x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$2x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση

Λύση: Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$z = \max(4x_1 + 3x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Παρατηρούμε ότι οι τελευταίες 3 στήλες του πίνακα A αποτελούν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα κι έτσι οδηγούμαστε στο αρχικό tableau της Simplex.

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
A_3	0	4	1	2	1	0	0	4
A_4	0	4	2	1	0	1	0	2
A_5	0	2	1	1	0	0	1	2
		0	4	3	0	0	0	

Η στήλη A_1 γίνεται βασική ενώ υπάρχει ισοβαθμία στο κριτήριο εξόδου μεταξύ A_4 και A_5. Αυτό σημαίνει ότι το επόμενο tableau θα έχει εκφυλισμένη λύση.

Για αυτό το λόγο εφαρμόζουμε τη μέθοδο διαταραχών παίρνοντας $\varepsilon = 0.1$

Τότε το διάνυσμα $\underline{b}$ αντικαθίσταται από το διάνυσμα

$$\underline{b}(\varepsilon) = \underline{b} + A w(\varepsilon), \quad w^T(\varepsilon) = [\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^5]$$

$\underline{b}^T(\varepsilon) = [4,121,\ 4,2101,\ 4.11001]$

Και το αρχικό tableau γίνεται:

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
				3	0	0	0	
A_3	0	4,121	1	2	1	0	0	4,121
A_4	0	4,210	$\boxed{2}$	1	0	1	0	2,1050
A_5	0	2,1100	1	1	0	0	1	2,1100
		0	4	3	0	0	0	

εξάγεται η A_4

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
			4	3	0	0	0	
A_3	0	2,01595	0	3/2	1	-1/2	0	1,34397
A_1	4	2,10505	1	1/2	0	1/2	0	4,2101
A_5	0	0,00496	0	$\boxed{1/2}$	0	-1/2	1	0,0099
		-8.4202	0	1	0	-2	0	

εξάγουμε την A_5 και εισάγουμε την A_2

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ
A_3	0	2,00107	0	0	1	1	-3	
A_4	4	2,10009	1	0	0	1	-1	
A_2	3	0,00992	0	1	0	-1	2	
		-8,43012	0	0	0	-1	-2	

Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας άρα έχουμε καταλήξει στη βέλτιστη λύση

$x_0^T = [2,10009,\ 0,\ 2,00107,\ 0,\ 0,00992]$

$x_{0B}^T = [2,00107,\ 2,10009,\ 0,00992]$

Επομένως η διαν. τιμών των βασ. μεταβλητών του αρχικού ΠΓΠ είναι

$x_B = x_{0B}^T - B^{-1}\Delta w(\varepsilon) = [2,\ 2,\ 0]$ και $x^T = [2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0]$ $\quad z = 8$